Augusto J. Santos Fitas, 1996, *Os Principia de Newton, alguns comentários (Primeira parte, a Axiomática),* Vértice, 72, 61-68.

Os Principia de Newton, alguns comentários (Primeira parte, a Axiomática)

Augusto J. Santos Fitas

1. Introdução

Isaac Newton (1642-1727), no prefácio da primeira edição dos **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**, escreve**:** «(...) *ofereço esta obra como os princípios matemáticos da filosofia, pois todo o tema da filosofia parece consistir no seguinte -- dos fenómenos do movimento investigar as forças da natureza e, então, destas forças demonstrar os outros fenómenos; e com este propósito são apresentadas as proposições gerais do primeiro e segundo livros. No terceiro livro dou um exemplo disto na explicação do Sistema do Mundo; pois, pelas proposições matematicamente demonstradas no primeiro livro, no terceiro eu derivo dos fenómenos celestes a força da gravidade através da qual os corpos são atraídos para o Sol e para diversos planetas. Então destas forças, usando outras proposições matemáticas, deduzo o movimento dos planetas, dos cometas, da lua e do mar* (...)»[1].

Está exposto de uma forma clara e sintética todo o seu programa de investigação no que diz respeito à filosofia natural. São três as características essenciais deste programa. Em primeiro lugar, o seu

[1] NEWTON, Isaac, *Principia mathematica philosophiae naturalis*, ed. Cajori, T.I, p.21 (1962, University of California Press), p.XVII. Esta edição corresponde à primeira tradução em língua inglesa feita por Andrew Motte sobre a última edição em idioma latino, publicada no ano de 1726, ainda em vida de Newton e por ele revista.

objectivo fundamental reside na explicação do movimento dos astros: é fornecido um modo rigoroso de derivar as leis de Kepler, desenvolvendo-se uma explicação quantitativa da causa desse movimento. Em segundo lugar, o rigor subjacente a toda a formulação está **na linguagem matemática usada pelo autor para descrever os fenómenos fisicos observados na natureza.** Pode dizer-se que, em Newton, «*a matemática servia para disciplinar a sua imaginação criadora*»[2], permitindo-lhe, para lá da intuição física ou filosófica, entender as relações quantitativas expressas pela natureza. Por último, o ter chegado à **formulação de leis naturais que unificam o mundo terrestre com o mundo dos astros,** leis que explicam o movimento do cometa e da bala, a queda da maçã e a trajectória da Lua em torno da Terra.

Os Principia são a primeira exposição sistemática, e rigorosa sob o ponto de vista matemático, da compreensão científica do Mundo, projectando-se a sua influência, de uma forma decisiva, na forma e no método como a partir de então se começou a pensar e a fazer ciência.

No sentido de melhor entender o espírito de Newton, a lógica de todo o edíficio erigido nesta obra fundamental, leia-se o que escreveu um eminente matemático português do sec.XVIlI, José Anastácio da Cunha que, no seu *Ensaio sobre os Princípios da Mecanica*[3], publicado postumamente, discorria:

---

[2] COHEN, I.Bernard, 1983, *La revolucion newtoniana y la transformacion de las ideas cientificas*, Madrid, Alianza Editorial, p.72.
[3] CUNHA, José Anastácio da *Ensaio sobre os Princípios da Mecanica*, in *Actas do Colóquio Internacional Seguidas de uma Antologia de Textos*, Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1991, p.339.

«o autor de um tratado puramente matemático, pode-se dizer que é um legislador, um creador; o autor de um tratado matemático de Física, é mero intérprete e comentador da Natureza. A verdade matemática não consiste senão na legitimidade com que os teoremas, e as soluções dos problemas se derivam das definições, postulados e axiomas; porém as definições, postulados e axiomas, pode-se dizer que a nenhuma lei são sujeitos. D'aqui vem que muitas coisas, que na Física são e devem ser objectos de demonstração experimental, na Matemática nem devem, nem ordinariamente podem ser demonstradas (...)

(...) Posso escrever um tratado de Óptica, em que tomo como hipótese, que a luz se propaga não em linha recta, mas em linha circular, ou em qualquer outra linha. Posso compor uma Mecânica, supondo as leis do movimento que eu muito quiser. E se os meus teoremas e as minhas soluções dos problemas forem legitimamente derivados dos princípios que estabeleci, ninguém me poderá arguir de erro.

Poderão sim censurar-me de ter indignadamente abusado do precioso tempo, se essas bem ajustadas e talvez elegantes teorias se não poderem aplicar à filosofia natural; se delas não poder tirar o género humano utilidade: e esta só consideração é que pode e deve pôr limites à imaginação do inventor. Por isso o geómetra que não quiser incorrer na censura de inútil, deve tomar, por princípios ou hipóteses, noções comuns, verdades de facto, que a Natureza, que a experiência ensinam: então o físico mostrando que os corpos naturais são (ou exacta ou proximamente) dotados daquelas mesmas propriedades, que o geometra

supos nos corpos matemáticos, poderá fazer uma feliz aplicação da teoria puramente matemática a alguns assuntos físicos.

Assim no livro dos princípios as leis intituladas do movimento, não vem demonstradas geometricamente; mas de serem realmente as leis que a Natureza segue, dá sir Isaac por fiadora a mesma Natureza: quero dizer, que as abona com a experiência. Os autores que depois tem escrito sobre o mesmo assunto (e alguns deles grandes geómetras) tem-se empenhado em achar demonstrações matemáticas daquelas leis, - porém debalde (...)».

2. Os Axiomas dos Principia, o seu enunciado

As leis físicas, introduzidas logo de início por Newton e base de toda a Mecânica Clássica, alicerçam-se em observações experimentais. Podiam não ser assim, mas são. E são-no porque as observações conduzem a estes enunciados. Estas leis podem ser entendidas como postulados ditados pela Natureza. Se as suas implicações, toda a teoria construida que delas deriva, também estão de acordo com a observação da Natureza, então, consistentemente, podem aceitar-se estes postulados como verdadeiros. Eles assumem, portanto, a categoria de leis físicas, isto é, *verdades* manifestadas pela própria Natureza.

Se a experiência ou a observação não estiver de acordo com as consequências deriváveis das leis, então a teoria tem que ser modificada no sentido de se tornar coerente com os factos observados já conhecidos. Contudo, nem sempre esta tarefa consegue ser levada a bom termo, havendo observações que, muitas vezes, não são enquadráveis pela teoria

e, embora esta se procure ajustar aos novos factos, este propósito de coerência resulta impossível. Está-se, portanto, na eminência de alterações das próprias leis. Estas devem ser entendidas, portanto, como verdades relativas manifestadas pela Natureza. São relativas porque dependem da capacidade do homem, numa determinada época histórica, em perscrutar e entender o *real*, e alterá-las provocará uma verdadeira crise no corpo de conhecimentos científicos, prenúncio daquilo a que alguns historiadores da ciência definem como uma *revolução científica.*

Eis os enunciados das leis de Newton retirados da edição de 1726 dos *Principia:*

I - *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*

Il - *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secumdum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

III - *Actioni contrariam semper et aequalam esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

Em português[4] escrever-se-á:

I - *Todo o corpo permanece no seu estado de repouso, ou de movimento uniforme rectilíneo, a não ser que seja compelido a mudar esse estado devido à acção de forças aplicadas.*

---

[4] SILVA, Mário, s/data, *Lições de Física -vol.I,* Coimbra, Livraria Almedina.

lI - *A variação de movimento é proporcional à força motriz aplicada; e dá-se na direcção da recta segundo a qual a força está aplicada.*

III- *A toda a acção sempre se opõe uma reacção igual; ou, as acções mútuas de dois corpos são sempre iguais e dirigidas às partes contrárias.*

Os **Principia** foram escritos numa forma dita geométrica, isto é na forma de um sistema hipotético-deductivo. Como facilmente se depreende dos enunciados apresentados, os três axiomas definem relações entre termos, ou grandezas, tais como *movimento uniforme rectilíneo, variação do movimento, força aplicada, acção e reacção.* Daí que, anteriormente à apresentação dos axiomas, a exposição newtoniana se inicie com um conjunto de oito definições prévias que incidem fundamentalmente sobre os conceitos empregues nas leis do movimento.

3. As Definições dos Principia

A Definição I debruça-se sobre a noção de *quantidade de matéria* ou massa. Newton define esta grandeza como o produto da densidade pelo volume. Uma definição feita à custa de uma relação entre duas novas grandezas, situação que coloca de imediato uma outra questão: o que é a densidade? A esta pergunta não é dada previamente qualquer resposta: parte-se do princípio que a densidade é um dado a priori. No seu comentário à definição de quantidade de matéria, o autor dos *Principia* escreve: «(...) *E é a esta quantidade que, a partir de agora, passarei a designar por corpo ou massa; é proporcional ao peso, como*

eu determinei por experiências com pêndulos (...)»[5]. Sublinhe-se para já a referência à relação entre *massa* e *peso* ou, aquilo que se pode chamar, a omnipresença do problema da gravidade.

Na Definição II caracteriza a grandeza *quantidade de movimento,* a sua expressão é *mv*, o produto da massa pela velocidade. As definições seguintes referem-se aos diferentes tipos de força.

A Definição III define a *vis insita,* ou seja a natureza inerte da matéria que é concebida como uma *força* de inactividade. Segundo Newton, a inércia é uma força inerente à própria matéria, *insita,* e latente enquanto não existir qualquer outra força aplicada ao corpo. Nesta definição de força não se vislumbra qualquer relação entre esta grandeza, este tipo de força, e o movimento por si provocado, isto é, qualquer grandeza cinemática observada. É importante citar o comentário desenvolvido por Newton a esta definição: «*(...) Um corpo, devido à natureza inerte da matéria, não é sem dificuldade que sai do seu estado de repouso ou de movimento. Por este motivo, esta vis insita pode tomar a designação mais significativa de inércia (vis inerciae) ou força de inactividade. Mas um corpo só exerce esta força quando uma outra força, aplicada sobre ele, altera a sua condição, e o exercício desta força pode ser considerada como resistência e impulso* (...)»[6]. É esta propriedade que é responsável pela resistência à alteração do estado de movimento e, ao mesmo tempo, é também ela que garante o estado de movimento do corpo se sobre ele nenhuma outra força actua. Assim, de acordo com Newton, a *vis insita* é a capacidade que cada corpo tem de resistir à alteração do seu

---

[5] NEWTON, Isaac, op.cit., p.1.

estado de movimento. Diferentes corpos oferecerão diferentes resistências, mas esta propriedade será constante para cada um deles. A característica individual de cada corpo é a sua inércia ou como se designa em mecânica clássica a massa inercial. O comentário de Newton a esta definição termina do seguinte modo: «(...) *movimento e repouso, tal como são vulgarmente entendidos, só se podem distinguir de uma forma relativa, nem estão verdadeiramente em repouso os corpos que comummente são tidos como tal*»[7]. A noção relativa de movimento, bem como o repouso entendido como um estado particular do movimento, é aqui, nos **Principia**, colocado pela primeira vez, sendo a diferença entre estes estados associada à existência de uma força particular, a *vis insita*. Newton prepara o caminho para a Primeira Lei da dinâmica.

As definições I e III apontam para duas grandezas que são, respectivamente, a quantidade de matéria ou massa gravítica (grandeza presente na expressão da Lei da Gravitação universal) e a massa inercial. Newton tem necessidade de postular a existência de ambas: a primeira tem para ele um significado físico (material) muito preciso, enquanto que a segunda corresponde a uma necessidade conceptual da sua teoria. Para Newton estas "duas massas" de qualquer corpo são iguais. Assume de uma forma implícita esta conclusão, não a prova[8].

---

[6] Ibid. p.2.
[7] Ibid. p.2.
[8] É com Einstein, como consequência do "princípio de equivalência" da Teoria da Relatividade Geral, enunciado em 1916, que se mostra a equivalência entre a massa inercial e a massa gravítica. Na mecânica newtoniana esta equivalência tinha um carácter meramente empírico e acidental, enquanto que na Teoria da Relatividade Geral ela surge como uma decorrência lógica dos princípios teóricos estabelecidos.

A Definição IV centra-se no conceito de força aplicada, *vis impressa,* como sendo a força que, actuando sobre um corpo, é responsável por modificar o seu estado de movimento, ou, bem entendido, de repouso. Newton clarifica que este estado de movimento é uniforme e rectilíneo. Para outros tipos de movimento Newton definirá outros tipos de forças. Três aspectos distinguem as *forças aplicadas* das *forças inatas:* «*(...) primeiro do que tudo são uma acção pura, de caracter transitivo, passageiro; segundo, não permanecem no corpo se a acção termina; terceiro, enquanto que a inércia é uma força universal da matéria, as forças aplicadas possuem diferentes origens, tal como* <u>*percussão*</u>*,* <u>*pressão,*</u> <u>*força*</u> <u>*centrípeta*</u> *(...)*»[9]. O carácter efémero destas forças traduz a ideia escolástica *cessante causa cessat effectus*. As forças aplicadas resultam de uma acção exterior sobre o corpo, enquanto que as forças inatas constituem uma característica do próprio corpo, residem nele.

Na Definição V Newton introduz o terceiro e último tipo de força, o de *força centrípeta:* aquela «*pela qual os corpos são puxados ou impelidos, ou de qualquer outro modo tendem, em direcção a um ponto como para um centro*»[10]; a designação newtoniana de força centrípeta corresponde às forças ditas centrais. Nas Definições VI, VII, VIII introduzem-se conceitos directamente relacionados com a força centrípeta. Uma questão se impõe: no comentário de Newton à Definição IV, já tinha sido colocado como um exemplo de uma força aplicada a força centrípeta, qual o motivo para uma definição particular deste tipo de

---

[9] JAMMER, Max. 1957, *Concepts of Force,* Cambridge-Massachusets, Harvard University Press.
[10] NEWTON, Isaac, op.cit., p.2.

força? *«Parece que Newton olhava para a força centrípeta como uma força de maior importância que todas as outras*»[11]. *A* nota à Definição V, conforme escreveu Newton, inicia-se deste modo, «*Deste tipo é a gravidade, pela qual os corpos tendem para o centro do magnetismo terrestre(...)*»[12], o que é bastante revelador sobre os motivos que levavam o autor dos *Principia* a dar uma especial atenção à força centrípeta ou força central.

Deste corpo de definições pode concluir-se: primeiro, a existência de imprecisão na definição do conceito de força, Newton jamais o define, procurando associar a certos efeitos, a existência de uma grandeza que passa a designar por força, donde aceitar-se a força como um conceito dado *a priori* (surgia intuitivamente de uma certa analogia com a força muscular); segundo, também o conceito de massa aparece definido de uma forma equívoca, este termo aparece associado a duas grandezas que são, respectivamente, a quantidade de matéria ou massa gravítica e a massa inercial que se assumem iguais; terceiro, as considerações tecidas por Newton sobre o conceito de força estão metodologicamente relacionadas com os seus estudos sobre a gravitação, a explicação dinâmica dos movimentos planetários, dados pelas três leis cinemáticas de Kepler, era o grande problema da época.

---

[11] JAMMER, Max, po.cit..
[12] NEWTON, Isaac, op.cit., p.3.

4. O Escólio

Entre as oito definições referidas e o enunciado dos três axiomas, Newton desenvolveu um conjunto de considerações com o propósito de caracterizar o que é tempo absoluto, verdadeiro e matemático, espaço absoluto e relativo, movimento absoluto e relativo. Ele próprio escreve: «*Não defino tempo, espaço, lugar e movimento, como sendo já do conhecimento de todos (...) Contudo observo que é vulgar conceber estas quantidades através das relações que experimentam com os objectos sensíveis. Daqui advêm certos preconceitos, para os eliminar, será conveniente distingui-los entre absoluto e relativo, verdadeiro e aparente, matemático e comum*»[13]. E, porque estes conceitos são do conhecimento de todos, Newton evita formalizar um novo conjunto de definições que engrossasse o conjunto prévio com que abrira os *Principia* (é o que acontece na terceira edição...)[14]. Não define espaço e tempo, lugar e movimento, desenvolvendo um longo comentário de sete páginas, onde procura clarificar estas noções, *eliminando* alguns *preconceitos.*

Dissertando sobre o espaço, Newton começa por afirmar, «(...) *o espaço absoluto, na sua própria natureza, sem uma relação com o que quer que seja exterior, permanece sempre igual e imóvel* (...)»[15], passando de imediato à noção de «*espaço relativo (...) que os nossos sentidos determinam pela sua posição em relação aos corpos e que é vulgarmente*

---

[13] Ibid., p.6.

[14] Em vida de Newton os **Principia** sofreram três edições: em Londres, 1687; em Cambridge, 1713 (reimpresso em Amesterdão em 1714 e 1723); em Londres, 1726. Todas estas edições diferem entre si na exposição científica, bem como nas posições filosóficas expressas.

[15] Ibid., p.6.

tomado pelo espaço imóvel, tal como a dimensão de um subterrâneo (...) é determinada pela sua posição com respeito à terra (...)»[16]. A ideia de espaço relativo dada por Newton é aquilo que hoje se entende por um sistema de referência, três eixos (...e um relógio se se considerar o tempo), que qualquer observador tem que usar para poder estudar o movimento; é elucidativo o exemplo da dimensão de um túnel, entendida como a diferença de posição, num determinado instante, em relação à *terra*, ou seja ao sistema de eixos que é o referencial. Quanto à referência ao espaço absoluto, nada foi adiantado, pois é qualquer coisa que permanece *sempre igual e imóvel*; mas, igual e imóvel em relação a quê?

Newton sabe que o espaço é homogéneo e, perante os nossos sentidos, as suas partes são indistinguíveis à nossa percepção. Contudo, esta entidade tem que ser alvo de medidas, sem as quais é impossível falar em movimento. Assim escreve, «(...*) porque as partes do espaço não podem ser vistas, ou distinguidas uma da outra através dos nossos sentidos, portanto em seu proveito usamos as suas medidas sensíveis. Longe das posições e distâncias das coisas de um corpo qualquer considerado como imóvel, definimos todos os lugares, e então com respeito a tais lugares, estimamos todos os movimentos, considerando os corpos como que transferidos de um daqueles lugares para outros. E assim, em vez de espaço e movimento absolutos, usamos os relativos; isto sem qualquer inconveniência nos assuntos comuns, mas nos desenvolvimentos filosóficos, temos que abstrair dos nossos sentidos, e considerar as coisas em si, distintas do que são as medidas sensíveis. Até*

---

[16] Ibid., p. 6.

pode acontecer que não haja nenhum corpo em repouso, em relação ao qual tenham que ser referenciados os lugares e os movimentos de todos os outros (...)»[17]. O que significa que os espaços relativos são os nossos sistemas de eixos, aqueles nos quais efectuamos as medidas. Estes espaços movem-se uns em relação aos outros. Logo, numa generalização, pode colocar-se a seguinte questão: será que não existe um sistema qualquer em relação ao qual todos os outros se movem? E Newton responde que «*num raciocínio filosófico temos obrigação de nos abstrairmos dos nossos sentidos, e considerar as coisas em si, distintas das suas medidas*», ou seja, em última análise existirá um espaço absoluto imóvel que correponde ao sistema de eixos absoluto e não está ao nosso alcance, baseados no conhecimento limitado de uma região do espaço, negar a sua existência. A existência do «espaço absoluto» corresponde a uma generalização filosófica, dos «espaços relativos». Para Newton, o espaço absoluto era necessário, como generalização conceptual, e atribuia-lhe realidade física porque estava fora da capacidade empírica do homem provar a sua não existência.

A hipótese do espaço e tempo absoluto constituiu uma necessidade teórica sobre a qual se construiu toda a física clássica, «(...) *enunciada por Newton com demasiada ostentação para ser ignorada pelos seus contemporâneos, esta hipótese acabou, no entanto, por assumir um papel mais discreto* (...)»[18]; de tal modo, que os físicos do

---

[17] Ibid., p.8.

[18] VERLET, Loup, 1993, *La malle de Newton,* Paris, Editions Gallimard, p.358. Uma das polémica mais célebres foi a que se estabeleceu entre Leibnitz e Clarke, um discípulo de Newton, onde o problema do espaço absoluto sobressai como uma das

séc.XIX a aceitaram sem lhe prestar grande atenção, excepção feita a Mach. Só no dealbar do séc.XX Einstein avança com uma proposta capaz de substituir todo o quadro teórico erigido por Newton.

Cedendo ao seu entusiasmo religioso, Newton escreve no final dos *Principia*, no *Escólio Geral*, «(...) [Deus] *existindo por todo o sempre e por todo o lado, ele constitui o tempo e o espaço* (...)»[19]. Para Newton, o espaço e o tempo «comum» eram conhecidos a partir das medidas relativas efectuadas com réguas e relógios, mas, para além destas quantidades, existiam um espaço e tempo verdadeiros, matemáticos e absolutos, fora de qualquer realidade experimental, metafisicamente entendidos como existindo sempre e por todo o lado, só testemunhados pela presença desse Deus que «(...) *governa tudo não como alma do mundo, mas como Senhor do Universo*».

No final do Escólio, Newton distingue entre movimento verdadeiro e relativo e entre movimento absoluto e relativo, usando para tal a relação entre a força aplicada ao corpo e o seu efeito, o movimento provocado. Newton refere-se, pela primeira vez, à relação entre a força e o movimento sem ainda ter enunciado as leis da dinâmica.

Porque nos comentários desenvolvidos por Newton estão implícitas as leis de mecânica, suspende-se aqui as notas ao Escólio e passa-se à discussão do significado destas leis. Em seguida retomar-se-á de novo o problema do espaço e tempo verdadeiros, matemáticos e absolutos.

---

questões de maior protagonismo filosófico (ver, por exemplo, A.J. Fitas, 1993, *Uma Controvérsia na História da Física*, Vértice, 56, 49-61).

[19] NEWTON, Isaac, op.cit., p.545.

5. O significado dos Axiomas dos Principia

O **primeiro axioma,** ou Primeira Lei, é conhecido como a Lei da Inércia. Esta lei é o culminar de um ponto de ruptura muito importante com a física pré-galilaica ou aristotélica. Nesta concepção o movimento era entendido como um processo, um desenvolvimento, que alterava as características inerentes ao corpo, opondo-se ao repouso que correspondia à ausência desse processo. Depois de Galileu movimento e repouso são indescerníveis, deixaram de afectar os atributos dos corpos, só podem ser definidos quando em relação com outros corpos. No universo newtoniano, esta lei associa a alteração do movimento de um corpo, enquanto estado, ao aparecimento de uma grandeza denominada *força aplicada*. Ou, outra importante inovação, os corpos oferecem *resistência* em, por si só, alterarem o seu estado de movimento (tendo sempre presente o repouso como um estado particular de movimento); para conseguirem esta alteração é necessário o aparecimento de causas exteriores que produzam tal efeito (as forças aplicadas).

A Definição III preparou o caminho para esta lei. A inércia deixou de ser, pura e simplesmente, a resistência ao movimento; a inércia passa a ser a *resistência à mudança do estado de movimento*. A permanência do movimento deixou de implicar a acção contínua de uma força, tal como assinalámos no comentário à Definição III, o corpo pode estar em movimento sem ser sob a acção de uma força.

Contudo, a esta primeira lei, para se constituir como tal, falta-lhe a relação entre grandezas O seu enunciado corresponde à forma física de definir determinados ***sistemas privilegiados de referência***. De acordo

com este axioma, a ausência de força aplicada implica que o corpo esteja em repouso ou em movimento uniforme e rectilineo. Então, para que tal seja observado requere-se um referencial em que se verifique o enunciado dado: o tal referencial privilegiado (referencial inercial) é aquele no qual é verdadeira a primeira lei. Newton, ao enunciar o Corolário V[20], mostra que não existe um só referencial que satisfaça as condições requeridas, mas sim um conjunto de referenciais, uma classe de *espaços*, que se designam por referenciais inerciais nos quais é verdadeira a lei da inércia.

O **segundo axioma** relaciona a força aplicada com a variação de movimento ou, de uma forma mais correcta, com a variação temporal da quantidade de movimento, Δp, aquilo que actualmente se pode escrever

$$\mathbf{F}\Delta t=\Delta\mathbf{p}$$

enquanto que Newton escrevia unicamente

$$F \propto \Delta p$$

A apresentação deste postulado como lei implica a existência de uma relação entre grandezas, entendidas estas, evidentemente, como entidades físicas mensuráveis. Mas, como anteriormente se escreveu, Newton, nas suas definições prévias, nada diz como medir massa e força. Logo, esta lei dificilmente pode tomar esse carácter, sendo, por muitos autores, apresentada, alternativamente, como a forma de definir a grandeza física ***força***. Sublinhe-se ainda, no conteúdo deste segundo axioma, a ausência prévia de uma definição clara do conceito de massa.

---

[20] "*Os movimento dos corpos num dado espaço* [em relação a um determinado referencial] *são os mesmos entre si, quer o espaço esteja em repouso, ou se mova uniformemente para a frente segundo uma linha recta sem movimento circular*" (Ibid., p.20).

Apesar de todas as limitações conceptuais e insuficiências axiomáticas, Newton consegue dar a ligação matemática, ou geométrica, entre a *vis impressa* (força aplicada) no corpo e os efeitos cinemáticos por este sofridos. Do conhecimento da força passa a conhecer-se as características de movimento. Não esquecer que Newton conhece a expressão analítica de uma força, a força gravítica (aquela que mais lhe interessa), podendo, então, estudar o movimento causado por ela; este era o seu objectivo principal!

O **terceiro axioma** acrescenta uma característica nova ao conceito de força: o seu aspecto dual; a existência de acção e reacção simultâneas. Esta é uma conclusão nova e muito importante. Há, no entanto, que chamar a atenção para o facto de esta terceira lei não ser uma lei geral da natureza, já que não é válida para qualquer tipo de forças. Esta lei só se aplica a forças que resultam da interacção de dois pontos materiais e cuja direcção coincida com a linha que une os pontos, ou seja, só se aplica às chamadas *forças centrais* (todas as forças elementares o são, e são-no a resultante de forças entre corpos extensos). A importância desta lei é manifesta, mesmo em formulações diferentes e mais recentes da mecânica clássica[21].

Newton sabia que as suas leis da mecânica só faziam sentido se se definisse um sistema de eixos e um relógio, um referencial ou uma classe de referenciais, em relação ao qual se pudesse fazer as medidas sobre o movimento dos corpos. Todavia, no enunciado destas leis não é feita qualquer menção a estes sistemas de referência nem às suas

características. E isto acontece porque o autor dos Principia, antes de enunciar os axiomas, admitiu a existência de um espaço e tempo absolutos: o referencial em relação ao qual as suas leis seriam verdadeiras. Revisite-se o Escólio...

6. O espaço e o tempo revisitados

Como se viu no ponto anterior, a primeira lei da axiomática newtoniana pressupõe para a sua verificação a existência de uma determinada classe de referenciais. São referenciais privilegiados nos quais a alteração do estado de movimento do corpo implica a detecção de força. O problema fisicamente importante reside em identificar estes referenciais sem conhecer a força ou, ainda, como identificar experimentalmente estes referenciais. A prova da sua existência corresponde a distinguir o movimento absoluto do relativo, encontrar a diferença entre, respectivamente, o deslocamento no espaço absoluto e no espaço relativo.

Newton escreve, «*As causas pelas quais o movimento verdadeiro e relativo se distinguem, um do outro, são as forças aplicadas aos corpos e que geram movimento. O movimento verdadeiro não é gerado nem alterado, mas é devido a uma força aplicada ao corpo que este é movido; mas o movimento relativo pode ser gerado ou alterado sem que qualquer força seja aplicada ao corpo. Portanto é suficiente aplicar uma força a outros corpos com os quais o primeiro se compara, que pelo seu*

[21] É o que acontece com a formulação, em finais do séc.XIX, proposta pelo físico austríaco E.Mach.

movimento, essa relação pode ser alterada, consistindo ela no movimento ou repouso relativo deste outro corpo (...)»[22]. O seu argumento essencial reside no facto de que existem forças reais e que estas provocam um movimento real e identificável em relação a todos os outros movimentos existentes quando da ausência de forças. No entanto, perante o que já se sabe das definições arroladas por Newton, força é *um conceito impreciso e que surge intuitivamente de uma certa analogia com a força muscular*; então, como é que o critério da força real permite distinguir entre movimento verdadeiro e relativo?

Se a causa é a força aplicada, quais serão os efeitos? Newton responde: «*Os efeitos que distinguem o movimento absoluto do relativo são as forças de afastamento do eixo do movimento circular. Pois não existem tais forças num movimento circular puramente relativo, mas num movimento circular verdadeiro e absoluto, elas são maiores ou menores, conforme a quantidade de movimento* (...)»[23]. Este é o essencial do raciocínio de Newton, o movimento circular absoluto tem como efeito o aparecimento de uma força centrífuga; se existe um referencial em relação ao qual se possa identificar a existência desta força, está identificado experimentalmente o referencial absoluto ou o *espaço absoluto*. É neste passo do Escólio que Newton expõe a célebre experiência do balde que se apresenta no QUADRO I..

No final da passagem **3** da sua experiência, Newton concluiu: primeiro, que a superfície livre da água é côncava, existindo, então uma força responsável por essa deformação; segundo, o facto de a água estar

---

[22] NEWTON, Isaac, op.cit., p.10.

em repouso em relação ao balde mostra que o movimento relativo não pode estar associado à força centrífuga; terceiro, a força centrífuga, responsável pela concavidade, está relacionada com o movimento de rotação da água em relação ao *espaço absoluto*.

QUADRO I

	Enunciado de Newton[24]	**Observação**
1	*Se um balde, suspenso de uma corda comprida, sofrer muitas voltas em torno da corda, sendo depois cheio com água,*	aceleração da água em relação ao balde é nula; a superfície livre da água é plana
2	*e largado do repouso conjuntamemte com a água; então por acção de uma outra força, rodará em torno do mesmo eixo mas em sentido contrário e quando a corda deixar de estar torcida, o balde continuará por algum tempo com o mesmo movimento; a superfície da água será no princípio plana, tal como antes do balde começar a rodar;*	aceleração da água em relação ao balde não é nula; a superfície livre da água é plana
3	*mas depois, o balde começará por gradualmente comunicar o seu movimento à água, começando esta a rodar e a pouco e pouco subirá junto ás paredes do balde, formando ele própria uma figura côncava (como eu experimentei), e quanto mais rápido for o movimento, mais alto subirá a água no balde, até por fim rodar simultaneamente com ele, ficando em repouso relativamente ao balde.*	aceleração da água em relação ao balde é nula; a superfície livre da água é concava
4	(completamos a experiência: o balde finalmente imobilizar-se-á continuamdo a água a rodar e a pouco e pouco descerá junto ás paredes do balde, sendo a sua superfície cada vez menos côncava,	aceleração da água em relação ao balde não é nula; a superfície livre da água é concava
5	para no fim ser um plano)	aceleração da água em relação ao balde é nula; a superfície livre da água é plana

Os argumentos são controversos e o próprio Newton reconhece que «*é de facto um assunto de grande dificuldade descobrir, e efectivamente distinguir, o movimento verdadeiro dos corpos do aparente, porque as partes desse espaço imóvel, no qual esses*

[23] Ibid., p.10.
[24] NEWTON, Isaac, op.cit., p.10.

movimentos têm lugar, não ficam por nenhuns meios sob a observação dos nossos sentidos (...)»[25].

O físico austríaco E. Mach contestou o raciocínio de Newton e escreveu: «*A experiência de Newton com o balde de água em rotação informa-nos simplesmente que o movimento relativo da água em relação às paredes do balde não produz forças centrífugas, mas que estas forças são produzidas pela rotação em relação à terra e aos outros corpos do universo*(...)»[26], acrescentando que nada se pode dizer se a experiência for feita noutras condições (diferente massa e espessura do balde). A experiência de Newton não era suficientemente geral para provar o que quer que fosse.

Uma experiência análoga à descrita por Newton pode servir de contra-exemplo, ei-la: num balde, suspenso de uma corda comprida que está completamente torcida, é colocado no seu interior, e ajustando-se perfeitamente à sua cavidade um molde de uma substância rígida, por exemplo madeira;o balde ao ser largado do repouso, conjuntamente com o molde, rodará em torno do mesmo eixo mas em sentido contrário e quando a corda deixar de estar torcida, o balde continuará por algum tempo com o mesmo movimento; o balde comunicará gradualmente o seu movimento ao molde, não se alterando a superfície livre da madeira, até por fim rodarem os dois simultaneamente, encontrando-se ambos em repouso relativo. Conclusão: primeiro, a superfície livre da madeira não é côncava, é plana, então não há qualquer deformação que permita supor a

---

[25] Ibid., p.12.
[26] MACH, E., 1960, *The Science of Mechanics*, The Open Court Publisshing Company, , p.284.

existência de uma força (o que não significa que não exista e não se manifeste em efeitos não observáveis directamente); segundo, o facto de não se identificar uma força centrífuga (através da observação directa) obriga a reconhecer que não há qualquer movimento do molde em relação ao espaço absoluto. As duas experiências, a de Newton e esta última, são formalmente iguais e as conclusões extraídas são completamente diferentes.

A experiência apresentada por Newton nos Principia, de modo a ilustrar a ideia de espaço absoluto, foi, ao longo de vários séculos, contestada por diferentes autores. Todavia só o Princípio da Equivalência de Einstein na Teoria da Relatividade Geral permitiu clarificar toda esta polémica [27].

Embora em tudo o que se expôs até aqui, o conceito de espaço seja aquele a que se deu mais atenção, a primeira definição a ser apresentada no Escólio é referente ao tempo. Newton escreve «*o tempo absoluto, verdadeiro e matemático. em si próprio, e da sua própria natureza, flui igualmente sem relação com nada exterior», enquanto que «o tempo relativo, aparente e comum é a medida sensível e exterior da duração através do movimento, que é comummente utilizada em vez do tempo verdadeiro*»[28]. O conceito de tempo absoluto é deveras difícil de entender: qualquer coisa que «*flui igualmente*» (o que pressupõe uma comparação), em relação a quê? A medição deste fluir não tem termo de comparação. Será que Newton não se apercebeu que este conceito era

[27] Consultar, por exemplo, Max Born, 1962, *Einstein's Theory of Relativity*, NY, Dover Publications, Inc..
[28] NEWTON, Isaac, op.cit., p.6.

falacioso e, até certo ponto, inútil? A resposta deverá ser afirmativa, pois logo a seguir avança com o conceito prático de tempo relativo que, ele próprio reconhece, ser o aplicável.

Ao comentar esta sua definição que inicia o Escólio, Newton explica: «*Em astronomia o tempo absoluto distingue-se do relativo pela equação do tempo aparente. Pois os dias naturais são de facto desiguais, embora sejam vulgarmente considerados como iguais e usados para medir o tempo; os astrónomos corrigem esta desigualdade para que possam medir os movimentos celestiais com um tempo mais preciso*», o tempo relativo tem que ser corrigido, de modo a criar um padrão universal de tempo que se possa aplicar a todos os fenómenos observados quer aqui, quer em qualquer ponto do sistema solar; e prossegue «*pode acontecer que não exista tal coisa como movimentos iguais, através do qual o tempo possa ser medido com toda a precisão*». Manifesta-se a dúvida sobre a existência de um fenómeno de tal forma exacto na sua periodicidade que possa vir a constitui-se como padrão do tempo absoluto, verdadeiro e matemático; e continua «*Todos os movimento podem ser acelerados ou retardados, mas o fluir do tempo absoluto não está ligado com nenhuma variação», pois o padrão matemático do tempo só se pode comparar consigo próprio ou com nada. Reconhecendo que «a duração ou a perseverança da existência das coisas permanece a mesma, quer o movimento seja rápido ou lento ou não exista, e, contudo, esta duração deve ser distinguida do que são as medidas sensíveis*»[29] não importa o movimento que se escolha para comparar os tempos; o tempo

[29] Ibid., p.8.

passa, o homem envelhece independentemente do relógio que o acompanhe, os astros revolucionam periodicamente nas suas órbitas... Tem que haver um tempo não sujeito a qualquer movimento, um tempo absoluto!

Para Newton deveria existir um tempo «*constituído por uma sequência tal como os números reais*»[30] em que a regularidade desta sequência era independente de qualquer acontecimento ocorrido no universo. Era um tempo absoluto, matemático, impossível de ser redutível à experimentação.

Um relógio universal e uma régua universal eram instrumentos necessários para que o homem no séc. XVIII começasse a tornar inteligível a ordem cósmica de todos os fenómenos observados. Foram necessários dois séculos para que estes instrumentos ideais fossem dispensados ou, pelo menos, entendidos doutra forma.

---

[30] WHITROW, G.J., 1980, *The Natural Philosophy of Time*, London, Oxford Science Pub., p.35.

Augusto J. Santos Fitas, 1996, *Os Principia de Newton, alguns comentários (Segunda parte, a Gravitação),* Vértice, 73, 97-102.

Os Principia de Newton, alguns comentários (Segunda parte, a Gravitação)

Augusto J. Santos Fitas

1. Depois da Axiomática

Na parte dos *Principia* que precede o Livro I, Axiomas e Leis de Movimento, sucedem-se às três leis, seis corolários que descrevem as propriedades dos movimentos dos corpos, dos quais se destacam dois: a regra do paralelogramo para a composição de forças (Corolário I); o centro de massa de um sistema de corpos sujeitos exclusivamente às suas interacções mútuas permanece em movimento uniforme e rectilíneo ou em repouso (Corolário IV).

Este capítulo inicial termina com um Escólio onde, entre os diversos comentários desenvolvidos, Newton referencia os seus predecessores: «(...)*com as duas primeiras Leis e os primeiros dois Corolários, Galileu descobriu que a descida dos corpos variava com o quadrado do tempo (in duplicata ratione temporis) e que o movimento dos projécteis era ao longo de uma curva que era uma parábola; a experiência concorda com ambos a não ser que estes movimentos sejam um pouco retardados pela resistência do ar*(...)»[1]; «(...)[Com as mesmas Leis e Corolários] *Sir Christopher Wren, Dr.Wallis, e Mr.Huygens, os maiores geómetras dos nossos tempos, determinaram as regras de*

[1] NEWTON, Isaac, *Principia mathematica philosophiae naturalis*, ed. Cajori, T.I, p.21 (1962, University of California Press), p.21.

impacto e reflexão dos corpos rígidos e, mais ou menos na mesma altura, comunicaram as suas descobertas à Royal Society, exactamente concordando entre si nessas regras(...)»[2]. Newton referencia parte daqueles que ao longo dos séculos XVI e XVII haviam contribudo decisivamente para o avanço da mecânica, em particular no que diz respeito ao estudo dos choques de corpos rígidos. A reflexão sobre este último problema tinha levado Wren, Wallis, e Huygens a descobrirem independentemente a lei da conservação do momento linear. Deve-se, no entanto, destacar a ausência de menção a Descartes.

2. Os Principia e a Geometria

O Livro I intitula-se o Movimento dos Corpos, sendo a sua primeira secção constituida por dez Lemas que constituem as proposições demonstráveis necessárias para fundamentar dedutivamente os teoremas sobre o movimento, apresentados posteriormente. As proposições aqui apresentadas correspondem a noções elementares de cálculo diferencial, embora jamais se faça qualquer referência a este domínio matemático. Estes lemas versam sobre os limites de áreas, linhas e arcos de curva, as suas provas são feitas à custa de um raciocínio exclusivamente geométrico, ignorando toda a linguagem analítica já introduzida na Geometria (Descartes). No Escólio apresentado no fim desta secção Newton explica o porquê desta opção metodológica no cariz das demonstrações: «(...) *Estes Lemas foram permitidos para evitar as aborrecidas deduções envolvidas nas demonstrações ad absurdum, de*

[2] Ibid., p.22.

acordo com o método dos antigos geómetras. Pelo método dos indivisíveis as demonstrações são mais curtas, mas, porque a hipótese dos indivisiveis parece ser, até certo ponto, desarmoniosa e, portanto esse método é considerado para o cálculo menos geométrico(...)»[3].

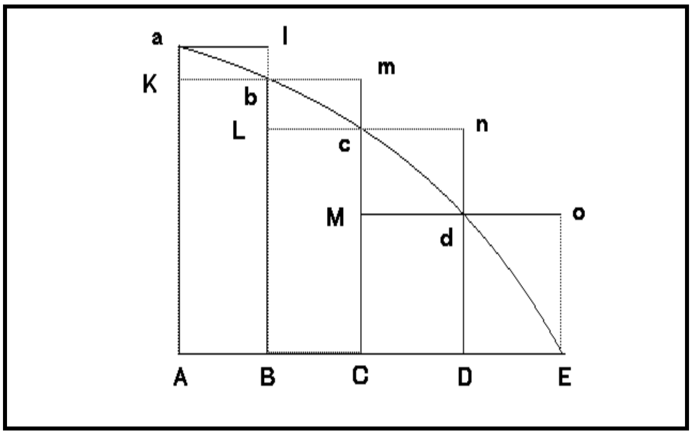


fig.-1

Embora este cálculo, através dos indivisíveis, fosse considerado menos geométrico no seu método, Newton desenvolverá as noções de limite e convergência com base numa exposição exclusivamente geométrica, prescindindo de qualquer linguagem analítica. Como exemplo repare-se no Lema II: *«Se em qualquer figura AacE limitada pelas linhas rectas Aa, AE e a curva acE se inscrever um qualquer de paralelograrmas Ab, Bc, Cd, etc., e os lados Bb, Cc, Dd, etc., forem paralelos ao lado da figura Aa; e os parlelogramas aKbl, bLcm, cMdn, etc., estiverem completados: então se a largura desses paralelogramas*

---

[3] Ibid., p.38.

diminuir e o seu número aumentar in infinitum, digo, que as razões últimas entre a figura inscrita AKbLcMdD, a figura circunscrita AalbmcndoE e a figura curvilínea AabcdE, serão entre si, razões de igualdade»[4]. Este enunciado é acompanhado pela ilustração apresentada na *fig.-1*.

O enunciado deste Lema corresponde a uma forma de apresentar o cálculo do integral, ou da área, como o resultado da igualdade dos limites do somatório, respectivamente, das áreas inscritas e das áreas circunscritas, o que surge claramente ilustrado na expressão «(...) *se a largura desses paralelogramos diminuir e o seu número aumentar in infinitum* (...)»

Ainda no sentido de ilustrar a presenca da noção de limite e de convergência atente-se nesta passagem do Escólio, no final desta secção, «(...) *As razões últimas com as quais se anulam as quantidades não são verdadeiramente as razões dessas quantidades últimas, mas limites em relação aos quais as razões das quantidades, decrescendo sem limite, convergem sempre, e para a qual elas se aproximam tão perto quanto uma dada diferenca, mas nunca vão para lá, nem de facto a atingem, até que as quantidades diminuam in infinitum*»[5].

No que diz respeito à diferença entre o método que lhe permitiu descobrir certos resultados, em particular as demonstrações das Leis de Kepler, e a forma como nos *Principia* apresenta essas demonstrações, o próprio Newton comenta: «*Através do Método inverso das fluxões, no ano de 1677 eu encontrei as demonstrações das Leis de Kepler para a*

[4] Ibid., p.39.

Astronomia, por exemplo que os Planetas se movem em elipses, que é a 11ª Proposição do primeiro livro dos Princípios; e no ano de 1683, perante o Dr.Halley, resumi essas considerações, e acrescentei outras proposiçõse sobre os corpos pesados que foram por ele comunicadas à R.Society (...) Escrevi o Livro dos princípios nos anos de 1684, 1685 e 1686 e ao escrevê-lo usei bastante o método das fluxões directo e inverso, mas não apontei os seus cálculos no Livro porque o livro foi escrito pelo método da composição, como toda a Geometria deve ser (...)»[6].

A Proposição I da secção II do Livro I, onde Newton estabelece que a existência de um força central implica a segunda Lei de Kepler e que a trajectória deverá ser plana, tem o seguinte enunciado: «*As áreas que os corpos em movimento de translacção descrevem por raios que passam por um centro imóvel de uma força* [central] *jazem no mesmo plano imóvel e são proporcionais aos tempos em que são descritas*»[7].

A demonstração é feita através dos passos que se passam a expôr. Newton, recorrendo à *fig.-2*, aproxima a trajectória curvilínea descrita por pequenos segmentos de recta, AB, BC, CD, DE, EF,..., a força central, sempre dirigida para o ponto S, actua por impulsos nos pontos (instantes) A, B, C, D, E, F, ..., desviando o corpo da sua trajectória rectilínea. Cormo o triângulo SAB define um plano e a força ao actuar em B fá-lo segundo SB, desviando a trajectória para BC, o novo

---

[5] Ibid., p.39

[6] Retirado de um rascunho de uma carta enviada por Newton a Des Maizeaux, escrita por volta de 1720 in COHEN, I.Bernard, 1978, *Introduction to Newton's Principia*, Cambridge, Harvard University Press, p.295).

triângulo BCS situa-se no mesmo plano que o anterior. O raciocínio prossegue para todos os segmentos, concluindo-se assim que as sucessivas trajectórias se encontram todas no mesmo plano.

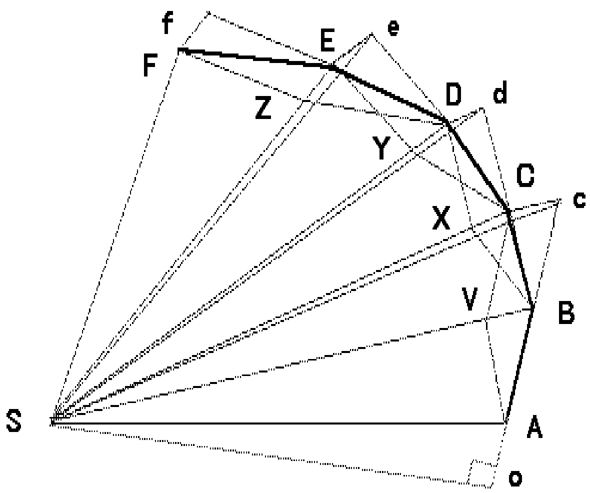


fig.-2

Considere-se um intervalo de tempo dividido em duas partes iguais. Na primeira parte o corpo percorre AB e, caso nenhuma força actuasse sobre ele, na segunda percorreria Bc, de tal modo que AB=Bc (Primeira Lei). Os triagulos ABS e BcS, porque têm bases iguais (AB=Bc) e altura comum, So, as suas áreas são iguais. Se em B intervier uma força centrípeta na forma de impulso o corpo é desviado de Bc e passa a deslocar-se segundo a direcção BC. Aplique-se a regra do paralelograma (Corolário I): pelo ponto c traça-se uma paralela à direcção

---

[7] Ibid., p.40.

SB que vai encontrar a recta BC no ponto C pertencente ao plano do triângulo ASB. Os triângulos BcS e BCS possuem a mesma base, BS, como a distância dos pontos C e c a este segmento é a mesma (Cc é paralela a BS), então a área dos triângulos é igual. As áreas de ABS e BCS são iguais.

Repetindo os argumentos utilizados conclui-se pela igualdade das áreas BCS e CDS, CDS e DES, ... e, por composição, as diversas somas destas áreas elementares estão entre si como os intervalos de tempo gastos em percorrê-las. Para terminar esta demonstração leia-se o que escreveu Newton: «(...) *aumente-se o número de triângulos,* e *a sua base diminuiu in infinitum; e o seu perímetro final ADF será uma linha curva: e portanto a força centrípeta, pela qual o corpo é continuamente afastada da tangente a esta curva actuará continuamente, e quaisquer áreas descritas SADS, SAFS que são sempre proporcionais aos tempos de descrição, serão, também neste caso, proporcionais a esses tempos. Q.E.D.*»[8].

Toda esta argumentação exclusivamente geométrica, da qual é afastado qualquer tratamento analítico, é a utilizada por Newton ao longo desta sua obra, não existindo qualquer recurso à linguagem de cálculo diferencial, entretanto por ele descoberto, e de que, tão insistentemente, se afirmou o pioneiro.

Newton, no período de 1664-65, ainda estudante do Trinity College em Cambridge, desenvolveu um método de análise, o Método das Fluxões, onde introduzira a noção de derivada, de diferencial e de

---

[8] Ibid., p.41.

infinitésimo, passando qualquer linha curva a não ser entendida como uma soma de vários segmentos, mas como uma linha continua. Em 1669, os resultados respeitantes à pesquisa sobre séries que, entretanto, desenvolvera, são compilados na obra Sobre a Análise de Equações não Limitadas no Número dos seus Termos. Um ano depois tenta publicar estes seus dois trabalhos de matemática num único livro, Método de Fluxões e Séries Infinitas, «*contudo, na forte depressão que se seguiu ao Grande Incêndio de Londres de 1666, não havia mercado para tais livros*»[9]; esta obra só será publicada em 1736.

Num relatório datado de 1715, Newton descreve o seu encontro com a geometria antiga como sendo posterior à elaboração da teoria da gravitação universal: «*É com o auxí1io da nova análise* [a que desenvolveu na sua juventude] *que o Sr.Newton descobriu a maior parte das proposições dos seus Principia Philosophiae; mas como, para atingir a certeza, os Antigos só admitiam em geometria o que fosse demonstrado de uma forma sintética, ele demonstra as proposições sinteticamente de modo que o sistema dos céus fosse fundado sobre a boa geometria*»[10]. Newton dá a entender que a sua primeira abordagem aos temas tratados nos Principia foi através da análise, optando por, na sua obra máxima, preferir o tratamento geométrico. Porquê esta opção?

Esta relação com a geometria poderá entender-se com base no Prefácio que escreveu para a primeira edição dos Principia. É explícito ao

---

[9] COHEN, I.Bernard, 1983, *La revolucion newtoniana y la transform.acion de las ideas cientificas,* Madrid, Alianza Editorial, p.298.
[10] Newton, I., An account of the book entitled *Commercium epistolicum,* in VERLET, Loup, 1993, *La malle de Newton,* Paris, Editions Gallimard, p.331

considerar a mecânica, na acepção de disciplina racional cujo procedimento é rigoroso e demonstrável, como geometria, enquanto que reserva a designação de mecânica propriamente dita para a «*mecanica prática*»[11] aplicada pelos artífices que «*não trabalham com precisão e rigor*». Conclusão: a Mecânica Racional tem que ser fundada num *constructio* geométrico. Contudo, Loup Verlet, na obra que se tem vindo a citar, avança com um outro argumento: o método geométrico empregue por Newton nos Principia deixa advinhar a sua adesão à doutrina da sabedoria primitiva *(prisca sapientia)*--«*(...)com os hermetistas da Renascença, Newton pensava que, mais próximos do que nós da origem, os sábios da antiguidade, mesmo sendo pagãos, possuiam um saber que remontava provavelmente a Moisés e que em seguida se perdera; parecia-lhes, portanto, evidente que as leis que tinham descoberto --ou, antes, redescoberto-- deviam ser escritas numa linguagem geométrica baseada na dos Antigos, em vez da linguagem algébrica que tinha inaugurado o seu falacioso adversário* (...)»[12]. Eis, um argumento bem adequado à iconoclastia de Newton...

4. Uma força que se exerce à distância

Nos Principia, logo a partir do primeiro teorema enunciado começa a perceber-se que a explicação dinâmica dos movimentos planetários, descritos pelas três leis cinemáticas de Kepler, é o grande objectivo da obra. A resolução deste problema, a determinação do tipo de

---

[11] NEWTON, Isaac, *Principia*, p.XVII

[12] VERLET, Loup, 1993, *La malle de Newton*, Paris, Editions Gallimard, p.331.

acção responsável por esta cónica harmonia celestial ocupava outros grandes espíritos da época como é o caso de Borelli, Hooke, Halley e Leibnitz e já merecera de Descartes, bem como do próprio Kepler, um esboço de uma teoria global do movimento dos corpos celestes.

Em 1600, Gilbert na sua obra De Magnete, primeira exposição sistemática do magnetismo terrestre, perante a natureza da força magnética que se manifestava na sua capacidade de actuar à distância originando movimento, extrapola «(...) *este movimento, que é a inclinação em direcção à fonte, não pertence só às partes da Terra, mas também às partes do Sol, da Lua e aos outros corpos celestes* (...)»[13]. E Newton associará os dois fenómenos, aceitando a sua mesma natureza, confundindo-os nos seus efeitos, escrevendo na nota à Definição V: «(...) *Deste tipo é a gravidade, pela qual os corpos tendem para o centro do magnetismo terrestre* (...)». Esta parecia ser a única forma capaz de materializar a acção à distancia...

Para Kepler, a aceitação do movimento dos planetas em torno do Sol obrigava a que este astro fosse o centro de forças magnéticas. Kepler concebia o Sol como animado de movimento de rotação, «*movimento que transmitia aos planetas por intermédio de uma species imaterial, análoga, por sua vez, à luz e à força magnética*»[14]. Esta *species* atravessa o espaço e, à medida que se afasta do Sol, o seu efeito vai enfraquecendo, o que explicava o movimento mais lento dos planetas mais afastados do Sol. Há uma certa analogia entre esta fonte de movimento e a propagação

---

[13] Gilbert, William, *De Magnete*, New York, Dover Pub, p.2.
[14] KOYRE, Alexandre, 1968, *Etudes Newtoniennes,* Paris, Editions Gallimard, p.14.

dos raios luminosos[15], pois, relembre-se Euclides, a intensidade da luz emitida por uma fonte varia na razão inversa do quadrado da distância a esta. Daí que Kepler, arrastado por esta semelhança, suspeite que a acção proveniente do Sol, *virtus movens,* e sentida pelos diversos planetas, deve respeitar a lei do inverso do quadrado das distâncias. Kepler fica-se pela suspeita porque, devido a erros de cálculo e à sua concepção aristotélica do movimento, é impelido para uma força proporcional ao inverso da distância. De qualquer modo, embora muito perto da solução que Newton virá a encontrar, seria impossível ao astrónomo polaco vislumbrá-la, pois a sua força magnética não é de forma alguma uma alternativa para a gravitação: «(...) *ela não é responsável pela manutenção dos planetas nas suas órbitas (...) para Kepler, tal como para Aristóteles,* o movimento circular é um *movimento simples e natural* (...)»[16].

Descartes substituia *o virtus movens* de Kepler pelo seu éter pleno de vórtices. O filósofo francês renegava a interacção à distância no vazio, substituindo todo o espaço por qualquer coisa como um líquido cheio de turbilhões que seriam os responsáveis pelo transporte dos planetas no seu movimento em torno do Sol. Embora senhor de ferramentas analíticas para tratar os problemas geométricos, Descartes não fez qualquer tentativa para explicar as célebres Leis de Kepler, no sentido de as adaptar ao seu sistema.

Hooke num artigo publicado em 1674 e intitulado *Uma tentativa para provar o Movimento anual da Terra* aderia, sem qualquer prova, à

---

[15] DUGAS, René, 1988, A *History of Mechanics,* New York, Dover Pub., p.215.
[16] KOYRE, Alexandre, op. cit., p.16.

hipótese de acção à distancia entre os planetas[17]: «*Todos os corpos celestes sem excepção exercem o poder de atracção ou peso dirigido para o seu centro; em virtude do qual não só retêm as suas próprias partes evitando que escapem, como é o caso da Terra, mas também atraem todos os corpos celestes que se encontram dentro da sua esfera de actividade. Assim, por exemplo, não só o Sol e a Lua actuam no sentido de fazer progredir o movimento da Terra, tal como a Terra actua sobre eles, mas também Mercúrio, Vénus, Marte, Júpiter e Saturno têm, devido ao seu poder atractivo, uma influência considerável no movimento destes corpos*». Hooke acabou por defender, influenciado pela analogia óptica, que o valor da atracção variava na razão inversa do quadrado da distância.

Halley, segundo parece o grande responsável pela publicação dos Principia, aplicou alguns teoremas enunciados por Huyghens sobre a força centrífuga, publicados sem demonstração no final da obra Horologium Oscillatorum, à hipótese de Hooke e assumindo a terceira lei de Kepler ($\frac{a^3}{T^2} =$ constante), concluiu sobre a lei do inverso do quadrado da distância.

Tudo indica que Newton estaria na posse de todos as hipóteses necessárias para inferir a sua célebre lei. Analise-se, nos seus primeiros passos, como Newton conduziu de uma forma matemáticamente rigorosa a relação entre as Leis de Kepler e a expressão analítica da Força da gravidade.

---

[17] in, DUGAS, René, op. cit., p.216.

5. Os Principia e as Leis de Kepler

No primeiro teorema da Secção II, Proposição I, estabelece-se que um corpo sujeito à acção de uma força central tem que obrigatoriamente obedecer à segunda lei de Kepler (a linha que une os planetas ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais) e que a sua órbita é plana. Na Proposição II prova-se a afirmação recíproca. Está encontrada (provada) a Segunda Lei de Kepler.

Na Proposição IV (Teorema IV) e nos nove corolários que lhe estão associados, são afirmados os resultados decorrentes do movimento circular descrito por acção da força centrípeta, comentando Newton no Escólio: *«O caso do sexto corolário obtido para os corpos celestes (tal como Sir Christopher Wren, Dr.Hooke e Dr.Halley observaram cuidadosamente), e portanto no que se segue tenciono tratar de uma forma mais ampla as questões que estão relacionadas com o decréscimo da força centrípeta com o quadrado da distância ao centro* (...)»[18]e, referindo-se a Huyghens, no seu «*excelente livro De Horologio Oscillatorio, comparou a força da gravidade com as forças centrífugas dos corpos em movimento de revolução*»[19].

Na secção III, composta pelas proposições XI à XXIX, é tratado o movimento dos corpos ao longo de trajectórias que constituem secções cónicas, demonstrando-se que, no caso do corpo estar sujeito à acção atractiva de uma força central, esta variará na razão inversa do quadrado da distância entre a posição do corpo e o centro da força. Na Proposição

---

[18] NEWTON, Isaac, *Principia,* p.46.
[19] Ibid., p.46.

XI, o resultado anterior é demonstrado para um movimento elíptico, enquanto que as proposições XII e XIII o fazem, respectivamente, para as trajectórias hiperbólica e parabólica.

Enquanto que nas proposições XI, XII e XIII, se estabelece aquilo que se designa por problema directo, no Corolário I da Proposição XIII, enuncia-se a inversa das proposições precedentes; escreve Newton: «*Das três últimas proposições* [XI, XII e XIII] *segue-se que qualquer corpo P ao deslocar-se de P com uma determinada velocidade e com a direcção da recta PR, sendo ao mesmo tempo submetido à acção de uma força centrípeta que varie na razão inversa do quadrado da distância do seu lugar ao centro, o corpo mover-se-á segundo uma cónica, tendo o seu foco no centro da força, e reciprocamente. Dado o foco, a posição e a direcção da tangente, uma secção cónica deverá ser descrita de modo que nesse ponto deverá ter uma determinada curvatura. Mas a curvatura é dada pela força centrípeta e pela velocidade do corpo; e duas órbitas intersectando-se não podem ser descritas pela mesma força centrípeta e pela mesma velocidade*»[20]. Utilizando uma linguagem analítica mais actualizada pode escrever-se que para uma força central do tipo (λ/r^2), conhecido λ, dada a posição e velocidade inicial, respectivamente, r_o e v_o, o corpo movimenta-se segundo uma trajectória que satisfaz as condições iniciais e a equação de movimento (F=ma) em qualquer instante, r = r(t); para além da existência de uma determinada solução, garante-se o seu tipo e a sua unicidade.

[20] Ibid., p.61 (sublinhado nosso).

O enunciado deste corolário é, na linguagem do seu autor, apresentado como uma evidência, uma decorrência lógica e imediata das proposições precedentes, não se alongando em qualquer pormenor demonstrativo de índole geométrica, limitando-se a uma justificação que na citação anterior se ressalta através do sublinhado.

Na primeira edição dos Principia este enunciado é escrito sem qualquer pista que apontasse para a a sua demonstração, contudo ao preparar a segunda edição da sua obra, Newton reconhece a necessidade de juntar uma frase que aludisse aos passos justificativos da afirmação[21]. A forma parcimoniosa do novo texto, onde são dadas as indicações do caminho da prova, é significativo de quão trivial, sob o ponto de vista matemático, Newton pensava ser este enunciado...

Apresentado na forma de problema, Proposição XVII, surge o sguinte enunciado: «*Suponha-se que a força centrípeta é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias das posições ao centro, e que o valor absoluto dessa força é conhecido; pede-se para determinar a linha que o corpo deve descrever quando sair de uma determinada posição com uma velocidade conhecida na direcção de uma linha recta*»[22]. Analisando a forma como este problema é resolvido por Newton conclui-se que o corpo percorrerá no seu movimento uma cónica e que esta é única.

---

[21] Bernoulli criticou Newton por este ter aceitado a verdade deste enunciado sem o demonstrar (in COHEN, I.Bernard, 1978, *Introduction to Newton's Principia*, Cambridge, Harvard University Press, p.287).
[22] Ibid., p.65.

Está encontrada (provada) a Primeira Lei de Kepler que satisfaz não só elipses como hipérboles e parábolas.

Após ter estabelecido a relação entre uma força central, variando na razão inversa do quadrado da distância, e os movimentos ao longo de secções cónicas dos corpos a ela sujeitos, Newton enuncia na Proposição XV (Teorema VII) a proporcionalidade entre os cubos dos semi-eixos maiores das órbitas elípticas e os quadrados dos tempos gastos em percorrê-las, quando o corpo está sujeito a uma força dirigida para um dos focos e é proporcional ao inverso do quadrado da distância.

Está encontrada (provada) a Terceira Lei de Kepler.

As três Leis de Kepler são uma consequência das Leis de movimento, aceitando ainda a hipótese de que a força responsável pelo movimento é central e inversamente proporcional ao quadrado da distância. Apesar de se garantir a proporcionalidade, ainda não foi calculada a sua constante, logo, na integra, não foi ainda estabelecida a Lei da Gravitação Universal.

6. A Gravidade

No Livro I dos Principia, Newton apresenta os conceitos, relaciona-os e estabelece as principais conclusões do seu modelo matemático; o problema das forças centrais não passa de uma hipótese que serve para sustentar diversos teoremas, mas nada é dito sobre a relação dos resultados atingidos e o comportamento da natureza. Newton edificou todo o seu sistema físico-matemático, mas é no Livro III dos

Principia, intitulado O Sistema do Mundo, que vai aplicar as conclusões teóricas ao estudo dos fenómenos naturais.

Este livro abre com as Regras de Raciocínio em Filosofia, são quatro e o propósito da sua apresentação corresponde aos seguintes objectivos: o número de causas explicadoras de um dado fenómeno natural deve sempre ser tomado no seu valor mínimo (Regra I); deve assumir-se que efeitos similares são provocados por causas idênticas (Regra II); as qualidades comuns a todos os corpos, determinadas pela experiência, devem ser entendidas como as propriedades dos corpos estendidas a todo o universo (Regra III); na natureza devem ser entendidas como verdadeiras as conclusões que se extraem através da indução geral, até serem refutadas por um qualquer fenómeno (Regra IV).

Segue-se uma lista de dados sobre fenómenos astronómicos: características das órbitas dos satélites de Júpiter e o seu acordo com as Leis de Kepler; o mesmo para os satélites de Saturno; identicamente para os planetas do sistema solar.

Baseado nos resultados do Livro I (Proposições II e IV), bem como nos dados astronómicos previamente expostos, Newton, nas Proposições I, II e III, mostra que as forças que actuam sobre os planetas são centrais, orientadas para o foco da trajectória e variam na razão inversa do quadrado da distância.

Na Proposição IV (Teorema IV) onde se enuncia, «*A Lua gravita em direcção à Terra, e pela força da gravidade é continuamente afastada do seu movimento rectilíneo e mantida na sua órbita*»[23], Newton,

---

[23] NEWTON, Isaac, *Principia*, p.407.

recorrendo aos dados astronómicos apresentados por vários autores (Ptolomeu, Huygens, Copérnico, Street, Tycho), conclui que «(...) *a força pela qual a Lua é mantida na sua órbita torna-se, à superfície da Terra, igual à força da gravidade que aí observamos nos corpos pesados (...) portanto (pela Regra 1 e 2) a força pela qual a Lua é mantida na sua órbita é a mesma força que comummente designamos de gravidade* (...)»[24]. De acordo com a demonstração feita pelo seu autor, onde são exibidos argumentos numéricos, o objectivo desta proposição é sobretudo mostrar que é a mesma, a força que é responsável pela queda dos corpos para a Terra, bem como a outra que aguenta a Lua na sua órbita. No Escólio a esta proposição, Newton ilustra o uso das suas Regras de Raciocínio em Filosofia com que abre o Livro III: se ambas as forças referidas (gravidade dos corpos pesados e força central actuando sobre a Lua) possuem a direcção do centro da Terra e têm o mesmo valor então deverão possuir a mesma causa (regra 1 e 2)...

A conclusão exposta nesta última proposição é generalizada para os satélites dos vários planetas nas Proposições V e VI. Na Proposição VII escreve: «*Existe o poder de gravidade pertencendo a todos os corpos, proporcional em várias quantidades à matéria que eles contêm*»[25]. Está definida a constante de proporcionalidade como uma função da massa gravítica; é nesta proposição que Newton enuncia a Lei da Gravitação Universal e, como assinala Chandrasekhar[26], das cartorze proposições

---

[24] Ibid. p.408.
[25] Ibid. p.414.
[26] .CHANDRASEKHAR, S., 1995, *Newton's Principia for the common reader*, Oxford, Clarendon Press.

(teoremas) desta secção, esta é a única em cujo final de demonstração Newton coloca a marca «Q.E.D», *Quod erat demonstrandum*.

Completou-se assim o raciocínio que possibilitou concluir que a força de atracção gravítica sobre um corpo de massa *m* é dada pela tão conhecida expressão analítica:

$$f = k \frac{m}{r^2}$$

É alicerçado nos postulados ditados pela natureza, base de toda a Mecânica Clássica, que Newton chegou finalmente à formulação de uma lei natural que unifica o mundo terrestre com o mundo dos astros, uma lei que explica o movimento da queda da maçã à superfície da Terra e a trajectória de qualquer planeta do Sistema Solar. Esta unificação permite tirar uma conclusão mais arrojada: onde quer que se encontrem no universo, quaiquer massas devem atrair-se de acordo com a mesma Lei. E toda esta audácia na compreensão da natureza foi permitida pelo rigor da linguagem matemática usada. Eis o paradigama do pensamento Newtoniano, a forma de raciocínio científico criador que viria a marcar as Ciências Físicas até aos nossos dias.